762. Bessel微分方程式カラ導カレル一ツノ微分方程式ニツイテ

伊藤　誠（広島高工）

1. 今私ノ方ノ學校ノ電氣學教室デ、導波管ノ中ヲ通シテ電磁波ヲ送ル研究ヲシテ居ラレマス。ソノ際矩形断面ノ環内ノ電磁波ヲ求メヨウトシテ、次ノ様ナ形ノ微分方程式ニ到達致シマシタ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (1)$$

特ニ $n=0$ ナル場合ニハ此ノ微分方程式ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (2)$$

トナリマス。今 $y=xz$ トオケバ、之レハ更ニ

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)z=0 \qquad (3)$$

ナル第一階ノ Bessel 微分方程式トナリ、従ツテソノ一般解ハ

$$z = AJ_1(x) + BY_1(x)$$

デ與ヘラレマス故、(2)ノ一般解トシテ

$$y = AxJ_1(x) + BxY_1(x)$$

ヲ得マス。

扨テ然ラバ(1)ノ一般解ハ如何ト申シマスト、之ハ次ノ様ナ方法デ求マリマス。

先ヅ第n階ノ Bessel 微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)z = 0 \qquad (4)$$

ヲ書キカヘテ

$$\frac{d(xz')}{dx} = -\frac{1}{x}(x^2 - n^2)z \qquad (5)$$

之レヲ微分シテ

$$\frac{d^2(xz')}{dx^2} = -\left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)z - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)xz' \qquad (6)$$

(5)ヲ代入シテ

$$= \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{x^2 - n^2}\cdot\frac{d(xz')}{dx} - \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)(xz')$$

従ツテ

$$\frac{d^2(xz')}{dx^2} - \frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2}\cdot\frac{d(xz')}{xdx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)(xz') = 0,$$

$y = xz'$ トオケバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\cdot\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

トナリ、(1)ナル微分方程式ガ得ラレマス。

依ッテ(4)ノ一般解ヲ

$$z=AJ_n(x)+BY_n(x)$$

トシマストト、(1)ノ一般解トシテ直チニ

$$y=AxJ_n'(x)+BxY_n'(x) \tag{7}$$

ヲ得マス。

上ノ解法ハ一寸技巧的ニ見エマスガ、実ハ他ノ方面カラ此ノ解ヲ求メタ後ニ考ヘ出シタモノデス。正面カラ解ク方法ガアリマシタラ御教示願ヒタイト存ジマス。

(昭和13.12.28)